Vol. XIII Nº 1 Junio (2005)
Educación e Historia: 63–82

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

El concepto de semicontinuidad de Baire en las investigaciones de Fréchet

Luis Cornelio Recalde   Luis Carlos Arboleda

Recibido Feb. 18, 2005   Aceptado May. 12, 2005

Resumen

En este artículo se aborda un problema clásico que tiene que ver con el cálculo de áreas y longitudes. En primera instancia se describe el proceso seguido por René Baire en la incorporación de la noción de semi-continuidad. A continuación se detalla la manera como Henri Lebesgue hace uso de esta noción para definir el área de una superficie y la longitud de una curva en $\mathbb{R}^3$. Al final se puntualiza la forma como Maurice Fréchet, quien estableció las bases conceptuales de la topología de conjuntos de puntos y del análisis general, recoge y generaliza los resultados de Lebesgue para el caso de funcionales.

Palabras y frases claves: Historia de las matemáticas, topología de conjuntos de puntos, semicontinuidad, integral y área.

Abstract

In this paper a classic problem about areas and lengths calculus is approached. At the beginning we describe how René Baire's arrived to the notion of semicontinuity. Next, we explain how Henri Lebesgue used this notion in order to define area of a surface and length of a curve in $\mathbb{R}^s$. We finish the paper explaining how Maurice Fréchet, who established the conceptual bases of set point topology and general analysis, generalizes Lebesgue's results to functionals.

Keywords: History of Mathematics, topology of discrete sets, integral, semicontinuity, area.

AMSC(2000): Primary: 01A55, Secondary: 01-02.

1 Introducción[1]

El objetivo general de este artículo es describir y analizar, a través del concepto de semicontinuidad, la manera como se fueron aclimatando, en la comunidad matemática, nociones de alto grado de generalidad. En el primer apartado se recoge la discusión, muy en boga a principios del siglo XX, sobre la pertinencia de estas nociones, las cuales no parecen responder a ningún tipo de aplicabilidad ni en los problemas de la ciencia ni en la lí nea de desarrollo de problemas matemáticos clásicos. Esta discusión se refiere al tipo de investigaciones desarrolladas por René Baire y Maurice Fréchet.

En el segundo apartado se presentan, de manera sucinta, algunos de los aspectos conceptuales desplegados por Baire que lo llevaron a establecer su famosa jerarquía de funciones, conocida como *las clases de Baire*. Aquí se

[1]Artículo elaborado en el marco de la investigación "La Representación de Funciones y su impacto en la Emergencia de la Topología. De René Baire a Maurice Fréchet", realizada con apoyo de COLCIENCIAS, proyecto 1106-11-11374.

muestra el papel de la noción de semicontinuidad en la caracterización de funciones de cada una de las clases.

El tercer apartado gira en torno al origen de la noción de semicontinuidad en el marco de un problema que marcó el derrotero investigativo de Baire, como lo es la existencia de funciones de dos variables, continuas con respecto a cada una de ellas, pero discontinuas cuando se toman en conjunto. Este problema finalmente se mostró subsidiario de otro más robusto que se encuentra en la base de las preocupaciones de Baire: determinar el tipo de funciones representables por series convergentes de funciones continuas.

En la tercera parte analizamos la incidencia de los resultados de Baire, específicamente del concepto de semicontinuidad, en el desarrollo de nuevos campos conceptuales. En este sentido, mostramos la manera como Lebesgue utilizó este concepto en su tesis doctoral de 1902, para definir las funciones longitud de curvas y área de superficies.

Finalmente analizamos la manera en que Fréchet aprovecha las definiciones de Lebesgue para mostrar, en su publicación de 1925, que el área es la menos discontinua de todas las funcionales semicontinuas, que extienden la funcional que representa el área de una superficie poliédrica.

2 La generalización en los programas de Baire y Fréchet

Durante los primeros años del siglo XX, el matemático francés Maurice Fréchet estableció las bases conceptuales de la topología de conjuntos de puntos y del análisis general. En el desarrollo de su proyecto intelectual, en muchas ocasiones, Fréchet toma como referencia los trabajos del también matemático francés Rene Baire sobre teoría de funciones discontinuas. Aunque los resultados de estos dos matemáticos fueron, en general, bien acogidos por la comunidad matemática, algunos connotados investigadores les reprochaban la extrema generalidad de sus trabajos sobre conjuntos de puntos abstractos.

Al respecto, es conveniente traer a colación las críticas de Émile Picard con relación a la falta de aplicación de los nuevos conceptos que aparecían en la línea investigativa de Baire. Las observaciones planteadas por Picard están muy acordes con la discusión acaecida a finales siglo XIX respecto a la importancia de los estudios generales sobre funciones. Mientras que en la escuela alemana, matemáticos de la talla de Weierstrass, Hankel, Schwarz, Klein, Thomae, Heine y Cantor, entre otros, se motivaron por el estudio de las funciones continuas y no derivables en ningún punto y por las funciones con alto grado de discontinuidad, los matemáticos franceses lo consideraban una perdida de tiempo.

Gastón Darboux es el encargado de difundir en Francia los estudios generales de funciones que se desarrollaban en Alemania. Sin embargo, el camino no se presentó expedito. Es famoso el intercambio epistolar entre Darboux y J. Houël sobre la importancia de las funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Tal como lo ha descrito Hélène Gispert en sus artículos [30], [31] y [32]. Houël sostiene que, como "un hecho de la experiencia (sin entrar a demostrarlo en general, lo cual puede ser difícil)" [33][p. 46], las funciones más arbitrarias a tratar son las continuas a trozos, calificando aquellas con infinitas discontinuidades u oscilaciones de "estrambóticas", "curiosas" y "bizarras", que corresponden sólo a patológicos contraejemplos. El único argumento esgrimido por Darboux que ameritaba el "cultivo de ese campo estéril de las funciones discontinuas" tenía relación con el rigor.

La mayoría de matemáticos franceses adhirieron al punto de vista de Houël y consideraron que el verdadero objeto del análisis eran las funciones con buen comportamiento en algún intervalo. Las demás funciones fueron condenadas al ostracismo y ubicadas en una especie de "museo de monstruosidades", como lo señalaba Lebesgue en 1922 [40][p. 100].

La teoría de funciones, en su máxima generalidad, empieza a emerger como un campo significativo para las matemáticas a partir de Baire. La manera como Baire rompe la resistencia de los conservadores franceses constituye un caso típico de desarrollo en la historia de las matemáticas: identificando uno de los problemas cruciales del siglo XIX, como lo es la convergencia de sucesiones de funciones, Baire lo interpreta a la luz de la teoría de conjuntos cantoriana[2], lo aborda a partir de los desarrollos de la tradición alemana y de los resultados de la nueva escuela italiana representada por Peano, Arzelà, Ascoli, Vivanti, Volterra y liderada por Dini, estableciendo un circuito de comunicación intelectual que alcanza su síntesis a través de la interconexión, conseguida por Lebesgue, entre las investigaciones conjuntistas de Borel, las funciones medibles y las clases de Baire. A partir de Baire, se sabe que el universo de las funciones continuas constituye sólo el primer peldaño de su escalera jerárquica; de las investigaciones de Lebesgue se sabe que el conjunto de funciones constituido por las funciones pertenecientes a las clases de Baire tiene la potencia del continuo, mientras que el universo de todas las funciones tiene una potencia mayor a la del continuo. Esto implica un cambio sustancial en cuanto al género de las funciones dignas de ser indagadas por los matemáticos. El tipo de funciones denominadas "bizarrras" ya no constituyen la excepción, sino que ocupan un terreno mucho más vasto que el de las funciones continuas. La teoría de funciones empieza a constituirse como un campo de las matemáticas que reclama autonomía. Justamente, en el reporte a la Academia de Ciencias de París[3], Emile Picard llama la atención sobre la extrema generalidad que desplegaba Baire en sus conceptualizaciones. Picard se refiere a la imposiblidad de concretar ejemplos de funciones de clase supe-

[2]En sus desarrollos sobre teoría de funciones Baire muestra la potencia de la teoría cantoriana de conjuntos en un ambiente en donde se discutía la legitimidad de los conjuntos actualmente infinitos. Estos aspectos han sido tratados en [Rec04].

[3]PICARD, E. Rapport sur les travaux de M. R. Baire (12 juin 1911). *Archives de l'Académie des Sciences de Paris.*

riores y de funciones que no pertenezcan a ninguna de ellas. También llama la atención respecto al uso del infinito, el cual "ha lanzado después de veinte años una gran confusión en el campo plausible de las matemáticas" [20][pp. 366-368].

Desde la publicación de su tesis doctoral [24], Fréchet también había sido blanco de objeciones similares a las que se le formulaban a Baire. Uno de sus críticos más célebres, Schoenflies, había comentado, en su influyente informe de 1908 sobre el estado de la teoría de conjuntos, que las nociones de la primera parte de la tesis doctoral de Fréchet eran extremadamente generales y que era necesario abandonarlas a partir del momento en que se quería abordar el estudio de "clases concretas". Fréchet da respuesta a estas objeciones en su publicación de 1910: *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel* [25]. Fréchet toma un espacio de Baire, como ejemplo de espacios concretos a los cuales era posible aplicar la mayor parte de las generalizaciones enunciadas en su tesis para *clases L*.

Pero más allá del caso particular anterior, se pueden reconocer, en una época común, dos líneas de investigación en las cuales encontramos conexiones teóricas importantes: la representación de funciones de René Baire y los espacios abstractos de Maurice Fréchet. Los aspectos comunes se pueden reconocer en varias instancias. Como ejemplo de modalidades complejas de definición de conjuntos abstractos, Fréchet menciona la sucesión de clases de funciones discontinuas de Baire. Fréchet se refiere a la definición de la sucesión de órdenes de derivación de los conjuntos lineales, tal como aparece en el parágrafo §33, de las *Leçons sur les fonctions discontinues* de Baire [10].

En el parágrafo §22 de su tesis de 1906, Fréchet utilizó las clases de Baire para mostrar que un conjunto derivado sobre un *espacio L* no necesariamente es cerrado.

En los parágrafos §23 y §24 de su tesis, Fréchet incorporó el siguiente resultado que ya había sido publicado en los *Comptes Rendus* de la Academia de París en 1905: "toda función $f(x)$ a la cual se le aplica la clasificación de Baire, puede considerarse como límite de polinomios salvo en un conjunto de medida nula. Si la sucesión de polinomios converge en todas partes, es de clase 0 o de clase 1. Si la sucesión converge uniformemente en toda parte es de clase 0; es decir, ella es continua. Basta incluso que la convergencia sea cuasi-uniforme en todas partes". Fréchet aclara que Lebesgue obtuvo ese mismo teorema como aplicación de su definición de la integral. En la base de esta aclaración se encuentra una interesante correspondencia dirigida por Lebesgue a Fréchet en respuesta a varias preguntas que éste le formulara entre 1904 y 1905.

La memoria de 1925 [28] es un ejemplo típico de la manera como Fréchet materializa su programa de generalización, el cual aparece bien dilucidado en la "introducción" de su famoso libro *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale* de 1928 [29]. Fréchet procede por analogía, reconociendo propiedades que se cumplen en un campo particular de funciones pero que se pueden aplicar a otras categorías de funciones, tal como lo hace en sus artículos, *La semi-continuité en géométrie élémentaire* de 1924 y *Sur le prolongement de fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes*, de 1925. Precisamente, el concepto de semicontinuidad constituye una de las novedades teóricas incorporadas por Baire para el logro de sus resultados. El papel de la semicontinuidad en el programa expansionista de Fréchet se analizará en la última parte de este artículo.

3 El marco teórico del programa de Baire

El problema de las funciones discontinuas que son límite de funciones continuas había sido pensado por Baire desde 1897. En el año siguiente, bosqueja su propuesta de representación de funciones en clases, incluso hasta el nivel transfinito [5][p. 34]. También expresa la diferencia entre el nivel nominal y la existencia efectiva; al respecto escribe:

> Se concibe así, al menos desde el punto de vista lógico, una clasificación racional de una enorme categoría de funciones discontinuas. Cada clase de funciones corresponderá a un número transfinito determinado.
>
> Sería un problema interesante, yo creo, ver en qué medida, esta concepción lógica corresponde a la realidad [5][p. 36].

Ya en su comunicación de 1897 [4], Baire había abordado este interrogante, dejando planteados los problemas básicos que debía resolver. Esta comunicación y otras tres que le siguieron: [6], [7] y [8], constituyen el planteamiento general de su tesis doctoral.

El objetivo central de Baire era utilizar la convergencia puntual para construir, en un proceso iterativo, funciones de clases superiores a partir de las funciones continuas. En este sentido incorpora sus famosas clases:

C_0: *Clase* 0, constítuida por todas las funciones continuas.

C_1: *Clase* 1, a la cual pertenecen las funciones que son límite de sucesiones de C_0, sin pertenecer a C_0.

C_2: *Clase* 2, conformada por las funciones que se obtienen como límites de sucesiones de C_0 y C_1, sin pertenecer a ninguna de ellas.

$\vdots$

C_n: *Clase* n, constítuida por las funciones que se obtienen como límites de sucesiones de clases anteriores, sin pertenecer a ninguna de estas clases.

$\vdots$

Para la definición de clases superiores, Baire se apoya en la construcción cantoriana de los ordinales transfinitos de acuerdo al siguiente esquema:[4] Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que $\forall n$, $\exists i$ tal que $f_n \in C_i$; además, si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, donde $f \notin C_i$, $\forall i$, entonces se tiene que $f \in C_\omega$, donde ω es el primer ordinal transfinito de la teoría cantoriana. De la misma forma se definen $C_{\omega+1}$, $C_{\omega+2}$, ..., $C_{2\omega}$, ... [9][p. 117].

Baire debe demostrar que su clasificación no es meramente nominal; esto es, debe caracterizar, en concordancia con sus concepciones filosóficas, las funciones pertenecientes a cada una de las clases que acaba de definir.[5] O dicho de otra forma, debe hallar propiedades que permitan identificarlas. Para ello establece algunos teoremas que en seguida detallamos.

Teorema 10. *Una función discontinua $f(x)$ es de la primera clase si y sólo si es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto [9][p. 62].*

Para la demostración de este teorema, Baire se ve obligado a constituir un marco conceptual novedoso alrededor de las funciones, que abarca las nociones de máximo, mínimo, oscilación, entre otras.

Para la generalización del concepto de máximo, tanto en un punto como en un dominio, Baire parte de una función f cualquiera de valor real definida sobre $D \subseteq \mathbb{R}^n$; para cada $P\left((x_1)_0,\ (x_2)_0,\ \ldots,\ (x_n)_0\right) \in D$, se define la bola $S_{\rho_1}(P)$,

$$S_{\rho_1}(P) = \left\{ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - (x_i)_0\right]^2 \leq \rho_1^2 \right\}.$$

Para los puntos de este conjunto, existe M_1, tal que $f(x) \leq M_1, \forall x \in S_{\rho_1}(P)$, donde M_1 es el límite superior de f en $S_{\rho_1}(P)$.[6]

Tomando la sucesión $\{\rho_p\}$, tal que $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_p > \cdots$, y $\lim_{p\to\infty} \rho_p = 0$, se forman las esferas encajadas:

$$S_{\rho_1}(P) \supset S_{\rho_2}(P) \supset \cdots \supset S_{\rho_p}(P) \supset \cdots$$

En cada esfera se toma M_i, como el límite superior de f en $S_{\rho_i}(P)$, obteniéndose la sucesión $M_1, M_2, ..., M_p, ...$, para la cual:

[4] En su tesis doctoral, esto lo hará de manera referencial, sin polemizar sobre los problemas ontológicos que se discutían en la época sobre la legitimidad o no de de los conjuntos actualmente infinitos.

[5] La caracterización de las funciones para Baire consiste en dar un procedimiento constructivo que permita mostrar la existencia de casos concretos.

[6] Baire no fija condiciones para el dominio D; en unas ocasiones parece que fuera un dominio abierto y en otras parece que fuera cerrado. Sin perdida de generalidad, se puede tomar cerrado con la condición de que cuando P sea un punto de la frontera de D, se calcule el límite superior para el conjunto de puntos comunes a D y a la bola $S_{\rho_1}(P)$. De hecho el problema genérico trata sobre funciones $f(x)$ definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para mayores detalles, ver [45].

$$M_1 \geq M_2 \geq \cdots \geq M_p \geq \cdots \qquad (1)$$

A partir de esta sucesión se define $M_0 = \lim\limits_{p\to\infty} M_p$, al cual se le denomina *el máximo de* f *en* P, y se representa por $M[f,P]$

El máximo de f en P, $M_0[f,P,]$ cumple dos propiedades fundamentales, especificadas en los teoremas siguientes:

Teorema 11. $\forall\varepsilon > 0, \exists\rho > 0$, *tal que* $f(x) < M_0 + \varepsilon, \forall x \in S_\rho(P)$.

Teorema 12. $\forall\varepsilon > 0, \forall\rho > 0, \exists x \in S_\rho(P)$ *tal que* $f(x) > M_0 - \varepsilon$.

Tomando el $\sup\limits_{x\in D} f(x)$, se obtiene $M[f,D]$, que designa el máximo de f en todo el dominio D. La función f debe ser una función acotada en D, para garantizar la existencia del supremo de cada una de las esferas cerradas y la convergencia de (1). Además, si $M_0 = \infty$, no se cumpliría el Teorema 3.

Es importante destacar que esta noción de máximo de una función en un punto perteneciente a un dominio acotado, continuo y cerrado, había sido establecida por Volterra en su artículo: *Sui principii del calculo integrale* de 1881[7] [46]. Precisamente este concepto de máximo de f en un punto le sirve a Baire de base para definir la *semicontinuidad superior*:

Definición 13. *Cuando* $M[f,P] = f(P)$ *se dice que* f *es semicontinua superiormente en* P.

Definición 14. *Cuando* $M[f,x] = f(x), \forall x \in D$, *se dice que la función es semicontinua superiormente en* D, *o también siempre igual a su máximo.*

En seguida, Baire plantea un ejemplo: dada una función cualquiera f, se define $\varphi(x) = M[f,x], \forall x \in D$. La función $\varphi(x)$ es *semicontinua superiormente* en D, es decir, *siempre igual a su máximo*, puesto que para $P_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$, por el Teorema 1, se puede encontrar un dominio D_1 en torno a P_0 tal que:

$M[f,D_1] < M[f,P_0] + \varepsilon$. De otro lado, para $x \in D_1$, $M[f,x] \leq M[f,D_1]$, de lo cual $M[f,x] \leq M[f,P_0] + \varepsilon$, lo que significa que $\varphi[x] < \varphi(P_0) + \varepsilon$.

De igual manera, se define el mínimo de f en P_0, $m[f,P_0]$, y las *funciones semicontinuas inferiormente o funciones siempre iguales a su mínimo.*

Después de describir algunas propiedades de las funciones semicontinuas, Baire incorpora otro de los conceptos centrales para el desarrollo de su investigación, como es el concepto de *oscilación*. Este concepto había sido incorporado por Riemann y precisado por Darboux en su *Memoria* de 1875 [19][p. 70]. Para ello incorpora la función máximo de f, $\varphi(x) = M[f,x], \forall x$, y la función mínimo de f, $\psi(x) = m[f,x], \forall x$.

[7] Cuestión que constituye una generalización del teorema de Weierstrass, según el cual una función continua alcanza sus extremos superior e inferior en un intervalo cerrado finito.

Definición 15. *La oscilación de f en x se define como $M[f,x] - m[f,x]$*

Igualmente define la oscilación de la función en un dominio:

Definición 16. *La oscilación de f en el dominio D se define como $M[f,D] - m[f,D]$.*

La oscilación se reveló de inmediato como una noción básica en la demostración del Teorema 1. Específicamente, Baire anota las siguientes tres propiedades:

1. Por definición, $\omega[f,P] \geq 0$.
2. Si $\omega[f,P] = 0$ entonces f es continua en P, puesto que $M[f,P] = m[f,P]$, y por las propiedades de éstos, f cumple la condiciones de continuidad.
3. Si $\omega[f,P] \neq 0$ entonces f es discontinua en P.

De esta forma, Baire reconoce en la oscilación el concepto que *mide* el grado de discontinuidad de f. Con base en las características de la función oscilación, Baire incorpora una de sus definiciones básicas registradas en el Teorema 1:

Definición 17. *Las funciones no continuas para las cuales existen, en todo dominio, puntos donde $\omega = 0$, se denominan funciones puntualmente discontinuas; en otro caso se denominan funciones totalmente discontinuas.*

De acuerdo con estas definiciones, se pueden demostrar las siguientes propiedades básicas:

1. Si una función es totalmente discontinua, existe un dominio de n dimensiones, en el cual la oscilación en cada punto tiene su mínimo positivo.
2. Las funciones puntualmente discontinuas cumplen la propiedad de que en cada punto y en todo dominio, el mínimo de ω es cero.
3. Una función discontinua y semicontinua superiormente (semicontinua inferiormente), es puntualmente discontinua.

Para caracterizar las funciones de la segunda clase, Baire introduce algunas nociones que se mostrarían importantes en el desarrollo de la topología conjuntista y del análisis funcional; a continuación se detallan algunas de ellas.

Definición 18. *Un conjunto lineal de puntos E es de primera categoría si existe una sucesion $\{E_n\}$ de conjuntos densos en ninguna parte, tal que $\forall x \in E, \exists n$ tal que $x \in E_n$. En otro caso se dirá que E es de segunda categoría [7].*

Teorema 19. *Una función $f(x)$ es de segunda clase si y sólo si $f(x)$ es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría con respecto al conjunto perfecto.*

4 El origen de noción de semicontinuidad en Baire

Baire comenzó a interesarse por las funciones discontinuas desde el inicio de su actividad matemática, cuando redescubrió funciones de dos variables, continuas con respecto a cada una de ellas, pero discontinuas cuando se toman en conjunto. A través de este problema, Baire llega al concepto de *semicontinuidad*, el cual, como lo hemos dicho antes, constituye uno de los elementos teóricos sobre los que soporta las demostraciones de los teorema 1 y 10.

En su memoria del 8 de noviembre de 1897 [4], Baire define, por primera vez, las *funciones semicontinuas superiormente* bajo el nombre de *funciones siempre iguales a su máximo.* En esta oportunidad, parte de la siguiente definición:

Definición 20. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I un intervalo. La función f es siempre igual a su máximo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha$ tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, para cualquier x_0 en I, y $|x - x_0| < \alpha$.*

Inmediatamente, Baire llama la atención sobre el hecho de que este tipo de funciones poseen una de las dos condiciones que en conjunto constituyen la continuidad. Anotación para nada intrascendente, ya que refleja, de alguna manera, las filiaciones y perspectivas que visualiza Baire en este concepto. Las referencias a Cauchy son inevitables en lo concerniente a su famoso resultado, según el cual, la suma arbitraria de funciones continuas es continua. Justamente, los contraejemplos surgidos tenían la peculiaridad de ser funciones puntualmente discontinuas; característica de la que participaban las funciones siempre iguales a su máximo, tal como lo refiere el mismo Baire. Sin embargo, la originalidad de Baire está en haber seguido el camino contrario, es decir, apoyarse en la semicontinuidad para demostrar que las funciones provenientes de sumas de funciones continuas, que no eran continuas, debían ser puntualmente discontinuas.

De esta forma, aunque con la convergencia uniforme se asentaba la condición suficiente para que una sucesión convergente de funciones continuas tuviese como límite una función continua, quedaba por resolver el problema inverso, es decir, determinar el tipo de discontinuidades de las funciones límites de una sucesión de funciones continuas, cuando ellas no eran continuas. En este sentido se puede entender la perspectiva de Baire y el papel del concepto de semicontinuidad, en el cual se soporta el proceso de demostración del Teorema 1 y que constituye la respuesta a la cuestión planteada.

Sin embargo, el mismo Baire precisa en su nota *Sur l'origine de la notion de semi-continuité* [13][p. 528], que fue conducido a este concepto, no a través de la designación *a priori* de las dos inecuaciones inherentes a la definición de la continuidad, sino a través del análisis de un problema concreto abordado por él en 1896. El problema está ligado directamente con uno de los "falsos teoremas de Cauchy" que detallamos en [45][4.1], según el cual, si una función de dos variables es continua respecto a cada una de ellas, entonces es continua en general. De manera autónoma, Baire encuentra el contraejemplo con la función:

$$G\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{para } 0<|x|\leq 1, 0<|y|\leq 1,\\ 0, & \text{para } x=0 \text{ ó } y=0\end{cases}$$

la cual utilizó también como contraejemplo en la construcción de las funciones semicontinuas que acababa de incorporar. Precisamente Baire, obtiene estas funciones semicontinuas como resultado de sus investigaciones sobre propiedades de las funciones de dos variables, continuas respecto a cada una de ellas. Toma una función $f\left(x,y\right)$ en un rectángulo $\mathcal{R}$ de lados paralelos a los ejes, con la condición de que f sea continua con respecto a x y con respecto a y, pero no con respecto a $\left(x,y\right)$.

Tomando la recta $x=x_0$ sobre el rectángulo $\mathcal{R}$, se tiene que $f\left(x_0,y\right)$ es una función continua de la variable y; sea

$$M\left(x_0\right)=\sup_{y\in[0,1]} f(x,y).$$

Dado que la función es continua, existe un punto $\left(x_0,y_0\right)$ tal que $M\left(x_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)$. Como $f\left(x,y_0\right)$ es continua respecto a la variable x, se tiene que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que si $|x-x_0|<\delta$, entonces $|f\left(x_0,y_0\right)-f(x,y_0)|<\varepsilon$. Si se toma $f\left(x_0,y_0\right)-f(x,y)<\varepsilon$, se tiene que,

$$\begin{gathered}M\left(x_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)<f(x,y_0)+\varepsilon\leq M\left(x\right)+\varepsilon,\\ M\left(x_0\right)\leq M\left(x\right)+\varepsilon.\end{gathered}$$

Inecuación que, como lo apunta Baire, constituye una de las propiedades que definen la continuidad. Si se toma como base la función $G\left(x,y\right)$, definida antes en $\mathcal{R}=[0,1]\times[0,1]$, se tiene que:

$$M(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

A esta función Baire la denominó semicontinua inferiormente, haciendo notar que, en general, existen funciones que cumplen una sola de las condiciones de la continuidad.

Como ya se aclaró, la semicontinuidad constituye la noción básica para la demostración del Teorema 1, el cual, en palabras de Dugac, “ha sido uno de los puntos de partida de la nueva teoría de funciones de variable real” [21][p. 120].

Tomando como referencia la función $G(x,y)$ antes definida, Baire se pregunta sobre la característica genérica de este tipo de funciones. Si bien esta función constituye un contraejemplo al segundo "falso teorema de Cauchy", el problema sólo se presenta en un punto ¿Es posible construir una función $f(x, y)$, continua con respecto a cada una de las variables que sea totalmente discontinua en todo punto con respecto al conjunto (x, y)? La respuesta la dará Baire en esta misma memoria a través del planteamiento de los siguientes teoremas cuya demostración apenas esboza:

> TEOREMA A: Si una función de dos variables, determinada en una cierta región, es continua con respecto a cada una de ellas, existen en toda área, puntos en cada uno de los cuales la función es continua con respecto al conjunto de las dos variables; en otros términos, la función es puntualmente discontinua con respecto al conjunto $(x,\, y)$.
>
> TEOREMA B: En las mismas condiciones, la sucesión de valores tomados por la función sobre $x = y$ forma una función de una variable que es puntualmente discontinua [4][p. 35].

Estos dos resultados se revelan importantes en la demostración de las condiciones necesarias del Teorema 1, el cual caracteriza las funciones de primera clase.[8] Más concretamente, Baire logra caracterizar las funciones de una variable como casos particulares de funciones de dos variables, ya sea tomando una de ellas como constante o relacionándolas a través de una ecuación. Así, dada una sucesión convergente de funciones continuas

$$\{f_n(x)\}, \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

definidas en el rectángulo $\mathcal{R} = [0, a] \times [0, a]$, y una sucesión de ordenadas $\{y_n\}$ que tiende a cero, se puede reemplazar $f(x)$ por la sucesión $\{f(x, y_n)\}$, de la siguiente manera:

$$f_1(x) = f(x, y_1),\;\; f_n(x) = f(x, y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x, y_{i+1}) - f(x, y_i));$$

de lo cual $\underset{n\to\infty}{\textit{lím}}\, f(x, y_n) = f(x, 0)$, y por lo tanto:

$$f(x) = f(x, 0) = f(x, y_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)).$$

[8] En la memoria de 1897, Baire también considera el caso para una función de n variables: $x_1, x_2, \ldots, x_n$: si f es continua independientemente para los grupos $x_1, x_1, \ldots, x_p$ y $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, entonces existen en todo dominio de n dimensiones puntos donde la función es continua con respecto a las n variables. Finalmente, Baire plantea el caso en el cual la función f, de n variables, fuese continua con respecto a cada una de ellas. En su Tesis Doctoral, Dugac [21][pp. 117-120], describe la evolución de este problema a través del intercambio que mantuvieron Baire y Volterra, y que culmina con el desplazamiento del primero a Turín para adelantar su trabajo de doctorado.

Entonces, las condiciones necesarias del Teorema 1 se pueden enunciar de acuerdo al planteamiento del siguiente problema: determinar las características de la función $f(x,0)$, donde $f(x,y)$ es una función definida en el rectángulo $\mathcal{R} = [0,a] \times [0,a]$, continua en todo punto excepto sobre el eje x, en el cual es continua sólo con respecto a y.

Observemos que la noción de semicontinuidad dirige la línea de razonamientos utilizados por Baire para solucionar el problema anterior. Posteriormente le servirá de referencia en la generalización del Teorema 10. Sin embargo, la importancia histórica de este concepto no se limita a su papel de auxiliar en la demostración de los resultados más importantes de Baire, sino que ella, en sí misma, constituye una noción "soporte del análisis" superior, como bien lo certifica Georges Bouligand en 1932 [21][p. 316]. Fréchet la utiliza en su programa expansionista; concretamente, para la generalización de las nociones de área y longitud, y en la extensión de funcionales.

5 Lebesgue y la semi-continuidad

En su tesis doctoral, Lebesgue hace uso de la noción de semicontinuidad incorporada por Baire, para definir la longitud de las curvas y el área de las superficies. En el capítulo III, aborda el problema de la longitud. Para ello, trae a colación algunas definiciones de longitud de curva:

1. Según Arquímedes, longitud de un arco de curva plana convexa es el valor común del límite superior de las longitudes de las líneas poligonales inscritas y del límite inferior de las circunscritas [36][p. 283].

2. Para Jordan, la longitud de un arco de curva es el límite hacia el cual tiende la longitud de una línea poligonal cuyo número de lados tiende a infinito, mientras la longitud máxima de estos lados tiende a cero [36][p. 284].

3. Peano establece la longitud de una curva como el límite superior de las líneas poligonales inscritas [36][p. 284].

El próposito de Lebesgue es lograr una noción de longitud de curva que, si bien guarde relación con el sentido intuitivo de las definiciones anteriores, evite las ambivalencias teóricas. El proceso seguido por Lebesgue es el siguiente: sea una curva C en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, entonces:

1. Si existe $\{P_n\}$, una sucesión de líneas poligonales tales que $\lim_{n\to\infty} l(P_n) = L \in \mathbb{R}$, donde $l(P_n)$ es la longitud de la línea poligonal P_n, se dice que la curva C es *rectificable.*

2. Si no ocurre el caso anterior, se dice que la curva es no *rectificable.*

Tomando en cuenta estas consideraciones, Lebesgue define el conjunto: $E = \{\lim\limits_{n\to\infty} l(P_n) / \{P_n\}$ es una sucesión de líneas poligonales que tienden uniformente a $C\}$.

Dado que $\sup E = \infty$, el carácter de la longitud de la curva depende del $\inf E$:

1. Si $\inf E = L \in \mathbb{R}$, entonces la curva es rectificable y $l(C) = L$.
2. Si $\inf E = \infty$, entonces la curva no es rectificable. En este caso se dice que la curva no tiene longitud y se coloca $l(C) = \infty$.

De esta forma, tal como lo hace notar el mismo Lebesgue en un pie de página, "si se considera la longitud como una función de la curva, se puede decir que la función es para todo igual a su mínimo o también semi-continua inferiormente" [36][p.286].

Para definir el área de una superficie, Lebesgue sigue los mismos delineamientos que para el caso de la longitud. Comieza recordando que durante mucho tiempo, se tomó como bien fundamentado el concepto arquimediano según el cual, "el área de una superficie convexa era el valor común del límite superior de las áreas de superficies poliedrales convexas inscritas y del límite inferior de las circunscritas" [36][p.298]. Aunque Arquímedes mostró que para los casos por él tratados, estos dos límites coincidían, el matemático Hermann Schwarz había descubierto que las áreas de las superficies poliedrales inscritas en un trozo de cilindro de revolución carecían de límite superior. Lebesgue, entonces se ve precisado a definir el área de una superficie siguiendo el mismo proceso que para la longitud de una curva.

Definición 21. *El área de una superficie es el más pequeño de los límites hacia los cuales tienden las áreas de las superficies poliedrales que convergen hacia la superficie dada.*

6 Fréchet y la semi-continuidad

Tal como lo señalamos en la primera parte de este artículo, la noción de semi-continuidad instaurada por Baire es retomada por Fréchet en sus articulos: *La semi-continuité en géométrie élémentaire* de 1924 [27] y *Sur le prolongement de fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes* de 1925 [28].

Acorde con los planteamientos de Lebesgue, en su artículo de 1924 Fréchet muestra que la función $A(P)$ que le asigna un valor determinado al área de un poliedro P, de un número variable de lados, no es continua puesto que para cada poliedro P_0 existe una sucesión $\{P_n\}$, de poliedros, tan próximos como se quiera a P_0, pero tal que

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) \neq A(P_0).$$

Fréchet muestra que la funcional $A(P)$ es semi-continua inferiormente. Este es el punto de partida de su artículo de 1925 para la generalización del concepto a funcionales cualesquiera.

Fréchet considera, en forma general, una funcional: $A : E \to \mathbb{R}$, donde E es un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. La idea de Fréchet es definir, para la función A, los conceptos que ha incorporado Baire en su tesis de doctorado y que hemos presentado en el segundo apartado de este artículo. Ello sólo es posible a condición de que E pertenezca a una clase (H) tal que:

1. Para todo elemento $s_0 \in E \in (H)$, tiene sentido hablar de una vecindad V_{s_0} del elemento s_0 (en este caso decimos que s_0 es interior a V_{s_0}).

2. Se puede definir sobre los elementos de (H) la operación de derivación por intermedio de la noción de convergencia de una serie infinita de elementos, la cual cumple las siguientes propiedades:

a. La derivación es distributiva: $(E + F)' = E' + F'$.

b. El conjunto derivado de un conjunto finito (es decir compuesto de un número finito de elementos) es vacío.

c. Todo conjunto derivado es cerrado (es decir, contiene su propio conjunto derivado).

Fréchet llama E' al conjunto de puntos de acumulación de $E \in (H)$ e incorpora los siguientes conjuntos como prerequisito para definir el mínimo:
$C = \{V/V \text{ es una vecindad de } s_0\}$
$I = \{\inf\{A(s)/s \in E \cap V, s \neq s_0\}, V \in C\}$

Definición 22. *Se define el mínimo de A en s_0 sobre E, designado por $A_E(s_0)$, como $A_E(s_0) = \sup I$*

Siguiendo el mismo proceso, Fréchet define el máximo de A en s_0 sobre E, designado por $A^E(s_0)$.

Tenemos que A_E puede ser finito o infinito. En cualquiera de los dos casos se trata de prolongar (extender) la funcional A de E a E'.

En primer lugar, tomemos el caso finito. Nuevamente se pueden presentar dos alternativas:

1. Si E es cerrado, $E' \subseteq E$, y el problema carecería de sentido.

2. Si E no es cerrado, puede ocurrir que $E \cap E' \neq \emptyset$. En este caso se debe cumplir que para cada $s \in E \cap E'$,

$$A_E(s) = A(s).$$

De esta forma se define la función extensión B de la funcional A de la siguiente forma:

$B : F = E \cup E' \to R$

$$B(s) = \begin{cases} A(s) & \text{si} \quad s \in E \\ A_E(s) & \text{si} \quad s \in E' \end{cases}$$

Se debe demostrar que B es semi-continua inferiormente. Veamos que esto ocurre: si $s_0 \in F'$ entonces $A_E(s_0) \geq B_F(s_0)$ y en consecuencia $B(s_0) \geq B_F(s_0)$. Basta demostrar que la desigualdad no es posible.

Sea V_{s_0} una vecindad abierta de s_0, entonces $B_F(s_0)$ es uno de los límites de valores de B sobre $F \cap V_{s_0}$, esto es, $B_F(s_0) = \lim B(s_n)$, donde $s_i \in V_{s_0}$, $i = 1, 2, \ldots,$ $s_i \neq s_j$ cuando $i \neq j$.

Se pueden presentar dos casos:

1. El conjunto $\{s_n \ /s_n \in E\}$ es infinito. Entonces se tendría que

$$\lim B(s_n) = \lim A(s_n),$$

lo cual significa que $B_F(s_0)$ corresponde a uno de los límites de A sobre $E \cap V_{s_0}$.

2. Para algún n, el conjunto $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\} \subset E'$. Esto significa que $s_i \in V_{s_0}$, $\forall i \geq n$ y para cada uno de ellos habría una vecindad V_{s_n} de s_n que pertenece a V_{s_0}.

Como $B(s_n) = A_E(s_n)$, existe $s'_n \in E$, $s'_n \in V_{s_n}$ tal que,

$$\left|B(s_n) - A(s'_n)\right| < \frac{1}{n}$$

.

Los elementos $s'_1, s'_2, \ldots$ pertenecen a V_{s_0} y se los puede suponer diferentes, escogiendo convenientemente V_{s_n}, de tal forma que $B_F(s_0)$ sea aún uno de los límites de A sobre V_{s_0}. De esta forma, para toda vecindad V_{s_0} de s_0, $B_F(s_0)$ es uno de los límites de A en s_0 sobre E, de donde

$$B_F\ (s_0) \geq A_E(s_0) = B(s_0).$$

Combinando las dos relaciones obtenemos,

$$B_F(s_0) = B(s_0).$$

Ello significa que B es semicontinua inferiormente sobre F. A continuación Fréchet demuestra la unicidad de B.

Al final del artículo, Fréchet aborda el caso de la extensión infinita, que precisamente es el caso del área. Se trata de analizar lo que ocurre cuando la funcional $A(s)$, semicontinua inferiormente sobre E, no tiene un máximo y un mínimo finito en todo elemento de $E \cap E'$.

En primer lugar, es necesario suponer que una funcional se considera como bien definida si en ciertos elementos de su campo de existencia se le atribuye un valor infinito de un signo determinado. Estaríamos frente al caso anterior.

El problema es cuando se desea analizar las funcionales de valor finito. Entonces la extensión de $A(s)$ no será posible más que de E hacia la parte de E' donde $A_E(s)$ es finito.

Sea $f \subseteq E \cap E'$, el conjunto de los elementos en los cuales el mínimo de A sobre E es finito. Se define la funcional b de la siguiente forma:

$$b(s) = \begin{cases} A(s), \text{ si } s \in E \\ A_E(s), \text{ si } s \in f \cap E' \end{cases}$$

El caso anterior se aplica tanto a $b(s)$ y f, como a $B(s)$ y F. El único obstáculo es que el conjunto f puede no ser cerrado, y el máximo $b^F(s)$ de b en s sobre f puede ser infinito. En este caso, se dice que $b(s)$ es la menos discontinua de todas las funcionales $c(s)$ semicontinuas inferiormente sobre F que extienden $A(s)$.

7 Conclusiones

A partir de algunos de los resultados de Baire, Lebesgue y Fréchet se ha establecido un circuito epistemológico, mediante el cual hemos descrito la manera como se van estableciendo y desarrollando algunos conceptos novedosos en las matemáticas.

La instauración de la teoría de funciones de variable real por parte de Baire, Borel y Lebesgue, a comienzos del siglo veinte, dio lugar simultáneamente a la introducción de nociones matemáticas designadas por propiedades topológicas radicalmente nuevas. Estas nociones se convertirían en objetos naturales del “nuevo análisis” en la medida que los matemáticos fueron descubriendo que sus propiedades tenían aplicaciones fecundas en varios campos matemáticos.

Una de estas nuevas nociones fue la “semicontinuidad”, la cual, en un principio, aparecía como una simple noción auxiliar utilizada en la demostración de los teoremas que caracterizaban las funciones de las “clases de Baire".

Hoy sabemos que la noción de semicontinuidad ha sido considerada en diversas conceptualizaciones del análisis clásico y del análisis funcional. Por ejemplo, en la presentación de la obra matemática de Baire, Pierre Lelong llama la atención sobre el hecho de que la noción de semicontinuidad se aplica naturalmente a ciertas clases de funcionales en teoría de potenciales, en el estudio de funciones del análisis complejo [14][p.27].

Aquí hemos descrito la manera como el concepto de semicontinuidad constituye el soporte teórico usado por Lebesgue y Fréchet en el caso de extensión correspondiente al problema histórico de caracterizar las nociones de longitud y área.

Referencias

[1] Arboleda, L., Recalde, L. (2002) "Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality". Synthese, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 245-272.

[2] Arboleda, L., Recalde, L. (1999) "Las Concepciones Socio-epistemológicas de Fréchet en sus Investigaciones sobre la Teoría de los Espacios Abstractos y la Topología General." En: O. Restrepo, y J. Amaya: *Ciencia y Representación.* CES, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, pp. 66-77.

[3] Arboleda, L., Recalde, L. (1997) "Las Concepciones sobre Matemáticas y Experiencia en Maurice Fréchet". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. VI, pp. 79-94.

[4] Baire, R. (1897) "Sur la téorie générale des fonctions de variables reélles*".* *CRASP, 125,* pp. *691-694.*

[5] Baire, R. (1898a) Lettres á Emilé Borel. *Cahiers du Seminaire d'Histoire des Mathematiques* #11. Université Pierre et Marie Curie, 1990, pp. 33-128.

[6] Baire, R. (1898b) "Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues*". CRASP, 126, pp. 884-887.*

[7] Baire, R. (1898c) "Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues *"CRASP, 126,* pp.1621-1623.

[8] Baire, R. (1898d) "Sur el problème de l'intégration au point de vue des variables reélles." *CRASP, 125, 1897,* pp. 1700-1703.

[9] Baire, R. (1899) "Sur les Fonctions de variables reélles*". Annali di matem. pura ed appl.*, (3), 3(1899), pp. 1-123. (*Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 49-173*).*

[10] Baire, R. (1905) *Leçons sur les fonctions discontinues.* Gauthier-Villars, Paris. Nouveau tirage, 1930.

[11] Baire, R. (1906) “Sur la représentation des fonctions discontinues.” *Acta mathematica*, t. 30, p.1-48.

[12] Baire, R. (1909) “Sur la représentation des fonctions discontinues.” *Acta mathematica*, t. 32, 1909.

[13] Baire, R. (1927) “Sur l’origine de la notion de semi-continuité”. Bulletin de la Société Mathématique de France, 55, 141-142. (*Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 528-529).

[14] Baire, R. (1897-1927) *Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1990.

[15] Borel, E. (1898) *Leçons sur la théorie des fonctions.* Primera edición. Gauthier-Villars, Paris (Segunda edición 1914).

[16] Borel, E. (1905) “Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles.” *Mathematische Annalen,* 60, pp. 194-195.

[17] Cauchy, A. L. (1821) *Analyse Algébrique*, 1ère partie du Cours d’analyse de l’École royale Polytechnique, Imprimérie Royale, Paris. Traducción al español; *Curso de Análisis*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994.

[18] Cavaillès, J. (1938) *Méthode axiomatique et formalisme.* Hermann, Paris. Traducción al español: *Método Axiomático y Formalismo.* Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1992.

[19] Darboux, G. (1875) “Mémorie sur les fonctions discontinues.” *Annales sci. Ècole Normale Sup.* (2) 4, pp. 57-112.

[20] Dugac, P. (1976) “Notes et documents sur la vie et l’œuvre de René Baire.” *Arch. Hist. Exact. Sci.* 15, # 4, pp., 297-383.

[21] Dugac, P. (1978) *Sur les fondements de l’analyse de Cauchy à Baire.* Thèse de Doctorat d’État ès Sciences Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie.

[22] Dugac, P. (1981) “Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement.” En: Joseph W. Dauben (Ed.), *Mathematical Perspectives. Essays on Mathematics and its Historical Development.* Academic Press, New York.

[23] Fréchet, M. (1904b) “Généralisation d’un théoréme de Weierstrass.” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139, pp. 848-850.

[24] Fréchet, M. (1906) "Sur quelques points du Calcul fonctionnel." (Thèse de doctorat, Paris, 1906), *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* 22 (1906), pp. 1-74.

[25] Fréchet, M. (1910a) "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel." R*endiconti Circ. Mat. Palermo* 30 (1910), pp. 1-126.

[26] Fréchet, M. (1910b) "Les dimensions d'un ensemble abstrait." *Math. Ann.* 68 (1910), 145-168.

[27] Fréchet, M. (1924a) "La semi-continuité en géométrie élémentaire." *Nouvelles Ann. math.* (5) 3, pp. 1-9.

[28] Fréchet, M. (1925) "Sur le prolongement de fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes." *Fund. math.* 7, pp. 210-224.

[29] Fréchet, M. (1928) *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale.* Gauthier-Villars, Paris.

[30] Gispert, Hélène. (1983) "Sur les fondements de l'analyse en France." *Archive for exact sciences*, 28, pp. 37-106.

[31] Gispert, Hélène. (1990) ´´Principes de l´anayse chez G. Darboux et J. Houël (1870-1880), enjeux mathématiques, épistemologiques et institutionnels." *Revue d'histoire des sciences*, 43, p.p. 181-220.

[32] Gispert, Hélène. (1991) "La France mathématique. La société mathématique de France (1871-1914)". *Cahiers d´histoire et de philosophie des sciences*, Paris: Société française d´histoire des sciences et des techniques & Societé mathématique de France.

[33] Gispert, Hélène. (1995) "La théorie des esembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue et tous les autres". *Revue d´histoire des mathématiques*, pp. 39-81.

[34] Hobson, E.W. (1907) *The theory of functions of a real variable and Theory of Fourier's Series.* Cambridge, 1907.

[35] Houzel, C., OVAERT J., PIERRE, R., SANSUC, J. (1976) *Philosophie et calcul de l'infini.* François Maspero, Paris.

[36] Lebesgue, H. (1902) "Intégrale, Longueur, Aire." *Ann.Mat.*, (3) 7, pp. 231-359.

[37] Lebesgue, H. (1903) "Sur la representation, à partir de $z = x + iy$, des functions continues de x et y". *Bull. Sci. Math.* (2), 27, 1903, pp. 82-84.

[38] Lebesgue, H. (1904) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, 1904. 2^a édition, 1928. Réédition: Chelsea publishing company Bronx, New York.

[39] Lebesgue, H. (1905) "Sur les functions représentables analytiquement." *J. de Math. Pures et Appl.*, sér. 6, 1, 1905, pp.139-216.

[40] Lebesgue, H. (1922) Notice sur les travaux scientifiques, Œuvres I, pp. 99-175.

[41] Lusin, Nicolas. (1914) "Sur un problème de M. Baire." C.R. *Acad. Sci. Paris* 158, pp. 1258-1261.

[42] Lusin, Nicolas. (1921) S*ur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait,* Fund. Math., pp 155-157.

[43] Lusin, Nicolas. (1930) *Les ensembles analytiques et leurs applications.* Primera edición, Paris 1930. Segunda edición Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

[44] Natanson, I.P. (1964) *Theory of functins of a real variable.* Tercera edición. Frederick Ungar Publishing Co. New York, Vol 1,2.

[45] Recalde, Luis (2004) *La teoría de funciones de Baire. La constitución de lo discontinuo como objeto matemático.* Universidad del Valle. Cali.

[46] Volterra, V. (1881) "Sui principii del calculo integrale." *Giornale Mat.*, 19, pp. 333-372.

Dirección de los autores: L. Recalde , Univ. del Valle, lurecal@yahoo.com — L. Arboleda, Univ. del Valle arboleda@univalle.edu.co